Soluciones 1

Preparación Olimpiada Matemática

Problema 1. Encuentra todas las aplicaciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que para cada $a, b \in \mathbb{Z}$ verifican

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

.

Solución. Sea $P(a, b)$ el aserto

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que $P(-n, n)$ y $P(-n, n+1)$ dan

$$f(-2n) + 2f(n) = f(f(0)) \; ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$f(-2n) + 2f(n+1) = f(f(1)) \; ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Restandolé la primera a la segunda queda

$$f(n+1) = f(n) + \frac{f(f(0)) + f(f(1))}{2} \; ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Luego recursivamente obtenemos

$$f(n) = \frac{f(f(0)) + f(f(1))}{2} n + f(0) \; ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ahora que sabemos que f es una función lineal solo tenemos que encontrar cuanto vale su pendiente y su término independiente. Para simplificar las cuentas digamos $f(x) = mx + n$, introduciéndolo en la ecuación del enunciado queremos que

$$(m(2a) + n) + 2(mb + n) = m(m(a+b) + n) + n \; ; \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Simplificando

$$(2 - m)n = (m^2 - 2m)(a + b) \; ; \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Esto solo se puede verificar para cada $a, b \in \mathbb{Z}$ si $(m^2 - 2m) = 0$, esto es, o bien $m = 0$ en cuyo caso $n = 0$ o bien $m = 2$, en cuyo caso cualquier $n \in \mathbb{Z}$ funciona.

Las soluciones de la ecuación funcional son pues

$$f(x) = 0\ ;$$

$$f(x) = 2x + c\ ; \quad c \in \mathbb{Z}$$

$\square$

Problema 2. Sean $(a_1, b_1), (a_2, b2), \ldots, (a_{100}, b_{100})$ pares ordenados distintos de enteros no-negativos. Sea N el número de pares (i, j) verificando $1 \leq i < j \leq 100$ y $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$. Determinar el mayor valor posible de N sobre todas las posibles elecciones de los cien pares.

Solución. La respuesta es $N = 197$. De hecho la respuesta para n pares ordenados, con $n \geq 2$, es $2n - 3$.

Digamos que dos pares ordenados son *amigos* si cumplen la condición del enunciado. Veamos inductivamente que si $n \geq 2$ el máximo número de amigos para n pares es $N_n = 2n - 3$.

Que $2n - 3$ es alcanzable es trivial, con los pares

$$(1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1) \ldots, (n - 2, 1)$$

Veamos ahora inductivamente que ese es el máximo.

Para $n = 2$ es trivial que $N_2 = 1$, solo puede haber una pareja de amigos porque solo puede haber una pareja.

Supongamos ahora que el aserto es cierto para $n = m$, comprobemosló para $n = m + 1$. Si vemos que, necesariamente, existe un par ordenado con, a lo sumo, dos amigos habremos terminado gracias al paso inductivo que nos daría la desigualdad $N_{m+1} \leq N_m + 2$ y la construcción nos daría que la igualdad se alcanza, luego $N_{m+1} = N_m + 2$.

Veamos que existe tal par. Sea (A, B) par ordenado de nuestro conjunto de $m + 1$ pares con $A + B$ máximo. Entonces si $A + B$ tiene al menos un amigo en nuestro conjunto es trivial que $\gcd(A, B) = 1$.

Ahora, a lo sumo tendrá un amigo (r, s) con el que verifique $Ar - Bs = 1$, pues operando queda $r + s = \frac{1+Bs}{A} + s = \frac{1+(A+B)s}{A}$. Este número $r + s$ ha de ser entero y por ser $gcd(A, B) = 1$ queda que, módulo A, tenemos $s = -B^{-1}$. Sea $s_0 \in \{1, \ldots, A - 1\}$ verificando esta condición entonces queda claro que $s \in \{s_0, s_0 + A, s_0 + 2A, \ldots\}$, si $s \geq s_0 + A$ entonces $r + s = \frac{1+(A+B)(s_0+A)}{A} \geq \frac{1+(A+B)A}{A} > A + B$, contradicción con que $A + B$ era maximal en los pares de nuestro conjunto. Luego $s = s_0$ es la única opción, y como s determina unívocamente r tenemos, como deciamos, un solo posible par de esta forma en nuestro conjunto.

Que tendrá un solo amigo (r, s) de la forma $Ar - Bs = -1$ es análogo. Operando queda $r + s = \frac{-1+Bs}{A} + s = \frac{-1+(A+B)s}{A}$. Este número ha de ser entero y por ser $gcd(A, B) = 1$ queda que, módulo A, tenemos $s = -B^{-1}$. Sea $s_0 \in \{1, \ldots, A-1\}$ verificando esta condición entonces queda claro que $s \in \{s_0, s_0 + A, s_0 + 2A, \ldots\}$, si $s \geq s_0 + A$ entonces $r + s = \frac{-1+(A+B)(s_0+A)}{A} \geq \frac{-1+(A+B)(1+A)}{A} = (A+B) + \frac{(A+B-1)}{A} > A+B$, contradicción con que $A+B$ era maximal en los pares de nuestro conjunto. (La última desigualdad podría no darse si $A + B = 1$, pero esto forzaría $n = 2$). Luego $s = s_0$ es la única opción, y como s determina unívocamente r tenemos, como deciamos, un solo posible par de esta forma en nuestro conjunto.

Luego para cada una de las dos formas posibles de amistad del par (A, B) con suma $A + B$ máxima solo hay una amistad posible. Se sigue que el numero de amigos de (A, B) en nuestro conjunto es, a lo sumo, 2. Como queriamos ver. $\square$

Problema 3. Sea n un entero positivo. En un estante hay n libros, cada libro tiene una anchura y una altura de manera que no existen dos libros de igual anchura ni dos libros de igual altura.

Los libros comienzan en el estante ordenados de menor a mayor altura. En cada paso se pueden elegir dos libros consecutivos tal que el de la derecha sea mas alto y el de la izquierda mas ancho e intercambiar sus posiciones.

Probar que tras un número finito de pasos no hay mas movimientos y que en tal momento los libros quedan ordenados en orden creciente de anchura.

Solución. Sea O un ordenamiento de los libros en el estante y numeremos los libros de izquierda a derecha.

Consideremos el la aplicación F que a cada ordenamiento le asocia el número de pares de libros tales que el libro de la izquierda es mas ancho que el de la derecha, esto es

$$F(O) = \#\{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 : i < j \text{ y el libro } i \text{ es mas ancho que el libro } j\}$$

F es un monovariante para este problema, esto es, para cada vez que cambiamos dos libros F disminuye en una unidad. Efectivamente, para intercambiar dos libros adyacentes el de la izquierda habrá de ser mas ancho que el de la derecha, luego al realizar el cambio no se crearán nuevas parejas de libros cumpliendo la condición pero si que se eliminará la pareja que contaba este par de libros, de hecho será la única en eliminarse luego F decrementará en una unidad con cada paso.

Como el valor de F sobre todos los ordenamientos está acotado inferiormente por 0 y este inicialemente vale una cantidad finita se sigue que tras un número finito de pasos no puede haber mas movimientos posibles.

Hemos probado la primera parte del problema, la segunda parte es equivalente a probar que este monovariante eventualmente alcanza el valor 0.

Supongamos que estamos en un ordenamiento O tal que $F(O) > 0$, y eligamos entonces un par (i, j) de libros con $i < j$ tal que el libro en i es mas ancho que el libro en j y tal que $j - i$ sea mínimo. Evidentemente $j = i + 1$ pues en caso contario, sea $W(k)$ la aplicación que denota la anchura del libro k, tenemos $W(i) < W(i + 1) < W(j)$ por la minimalidad de (i, j), pero por hipótesis $W(i) > W(j)$ lo cual es una contradicción.

Ahora, sea $H(k)$ la aplicación que denota la altura del libro k, tenemos que si $H(i) > H(i+1)$ entonces el libro i empezó al inicio a la derecha del libro $i+1$, pero si ahora está a la izquierda es porque en algún momento se intercambiaron, lo cual es una contradicción porque $W(i) > W(i + 1)$. Luego $H(i) < H(i + 1)$.

Como partiendo de $F(O) > 0$ hemos encontrado un par $(i, i + 1)$ con $W(i) > W(i + 1)$ y $H(i) < H(i + 1)$ queda claro que en el momento que no podamos intercambiar mas libro tendremos $F(0) = 0$. Como ya hemos visto que este momento se alcanza eventualmente hemos terminado.

$\square$

Problema 4. En una recta tenemos cuatro puntos A, B, C y D, en ese orden, de forma que $AB = CD$. El punto E es un punto fuera de la recta tal que $CE = DE$. Demuestra que $\angle CED = 2\angle AEB$ si y solo si $AC = EC$.

Solución. Sea m la mediatriz de AD y O el simétrico de E respecto a m.

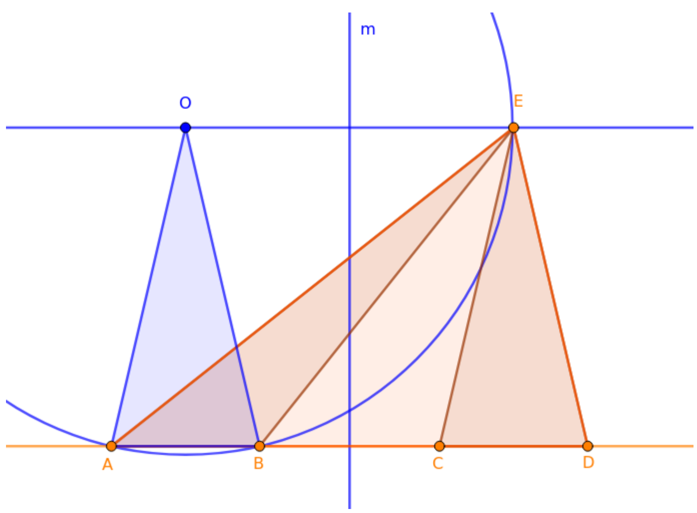

Figure 1: Problema 4

Respecto a m evidentemente A es el simétrico de D y, por ser $AB = CD$ con B a la derecha de A y C a la izquierda de D, B es el simétrico de C. Luego por simetrías $\angle DEC = \angle AOB$. Veamos pues que $\angle AOB = 2\angle AEB$ y habremos terminado.

Como O y E están en el mismo semiplano determinado por la recta AB gracias al teorema del ángulo doble y por arco capaz tenemos que $\angle AOB = 2\angle AEB$ si y solo si E está sobre la circunferencia de centro O que pasa por A y B, esta circunferencia sabemos que exite pues $OA = EC = ED = OB$.

Esto ocurrirá si y solo si $OE = OB$, pero $OE = AC$ pues $\vec{OA} = \vec{EC}$ y $OB = EC$ por simetría. Hemos terminado.

$\square$

Problema 5. Sean a y b enteros no negativos. Hay $a + b$ cuencos en fila, numerados del 1 al $a + b$. Inicialmente cada uno de los primeros a cuencos contiene una manzana y cada uno de los últimos b cuencos contiene una pera. Un movimiento consiste en llevar una manzana del cuenco i al $i+1$ y una pera del cuenco j al $j - 1$ con $i - j$ par. Demuestra que tras un número finito de movimientos es posible acabar con una pera en los primeros b cuencos y una manzana en los últimos a cuencos si y solo si ab es par.

Solución. Sean C_1 la configuración inicial y C_2 la final.

Veamos primero que si ab es par siempre podemos llegar de C_1 a C_2. Supongamos contradictoriamente que existen a y b con ab par tal que es imposible llegar de C_1 a C_2. Escojamos pues tales a y b con $a + b$ mínimo.

Si $a + b$ es impar entonces es fácil ver que en $a + b - 1$ pasos podemos intercambiar la primera manzana y la última pera sin tocar el resto, de manera que todo el bloque del medio es un bloque $(a - 1, b - 1)$ que cumple las condiciones del enunciado, y podemos resolver. Contradicción.

Si $a + b$ es par entonces como ab es par resulta que ambos son pares. Luego podemos hacer como antes pero con la primera manzana y la penúltima pera y con la segunda manzana y la última pera, en el medio se nos queda un bloque $(a - 2, b - 2)$, que cumple las condiciones del enunciado y podemos resolver. Contradicción.

Ya está.

Veamos ahora la otra implicación, que es equivalente a ver que si ab es impar entonces es imposible llegar desde C_1 a C_2. Cambiemos las manzanas por 1 y las peras por -1, y sea C una tal configuración de 1 y -1 en los cuencos.

Definimos $I(C)$ como la suma de los cuencos pares menos la suma de los cuencos impares. Está claro que $I(C)$ es un invariante para el problema pues tras aplicar un movimiento a la configuración la suma cambia por

$$[1 \times (-1)^{i+1} - 1 \times (-1)^{i}] + [(-1) \times (-1)^{j-1} - (-1) \times (-1)^{j}]$$

Esto es

$$\begin{aligned}[-2 \times (-1)^{i}] + [2 \times (-1)^{j}] &= 2 \times [(-1)^{i+1} + (-1)^{j}] \\ &= 2 \times (-1)^{j} \times [(-1)^{i-j+1} + 1] = 0\end{aligned}$$

Pues $i - j$ es par, luego $i - j + 1$ es impar y queda $(-1)^{i-j+1} = -1$.

Ahora, si ab es impar entonces $a = 2r + 1$ y $b = 2s + 1$ son impares, es fácil comprobar

$$I(C_1) = 1 \times (r + 1) - 1 \times r + (-1) \times s - (-1) \times (s + 1) = 2$$

$$I(C_2) = (-1) \times (s + 1) - (-1) \times s + 1 \times r - 1 \times (r + 1) = -2$$

Luego si ab es impar es imposible llegar a C_2 empezando en C_1.

$\square$

Problema 6. Sean n ladrillos de tal manera que cada ladrillo pesa al menos 1 y que el peso de todos los ladrillos es $2n$. Prueba que para cada real r con $0 \leq r \leq 2n$ podemos elegir un subconjunto de ladrillos con peso en $[r, r + 2)$.

Solución. Digamos que

$$w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n \geq 1$$

son los pesos de nuestros ladrillos.

Si $r = 2n$ el aserto es trivial.

Sea ahora $r \in [0, 2n)$. Sea $k_0 = 0$ y elijamos recursivamente k_i el menor indice en $\{k_{i-1} + 1, k_{i-1} + 2, \ldots, n\}$ tal que $\sum_{t=1}^{i-1} w_{k_t} < r + 2$. Eventualmente nos quedaremos sin indices pues hay una cantidad finita de ellos, digamos que esto ocurre en tras el paso N, en tal momento pueden ocurrir dos casos.

- O bien $r \leq \sum_{t=1}^{N} w_{k_t} < r + 2$ y hemos terminado.
- O bien $\sum_{t=1}^{N} w_{k_t} < r$.

  En tal caso tenemos que todos los pesos con índice en $\{k_t + 1, k_t + 2, \ldots, n\}$ son mayores estrictamente que 2, es fácil ver que $w_n \leq 2$. De donde se sigue que $k_N = n$.

Ahora, sea m el mayor índice tal que $m \notin \{k_1, \ldots, k_N\}$, entonces evidentemente $w_m \geq 2 + \sum_{i=m+1}^{n} w_i \geq 2 + \sum_{i=m+1}^{n} 1 = n - m + 2$ y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos $w_i \geq w_m \geq n - m + 2$.

Luego

$$2n = \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{m} w_i + \sum_{i=m+1}^{n} w_i \geq m \times (n - m + 2) + (n - m)$$

Operando queda o bien $n = 1$, y en tal caso contradicción pues en ese caso es fácil ver que nuestro proceso recursivo siempre termina, o bien $m = 1$ y en tal caso tenemos igualdad entre ambos lados, de donde se sigue que nuestra configuración de pesos es $(n + 1, 1, 1, \ldots, 1)$, pero contradicción pues es fácil ver que con estos pesos podemos conseguir en particular cualquier entero en $\{1, \ldots, 2n\}$ menos el n y como todo intervalo $[r, r + 2)$ contiene exactamente dos enteros consecutivos ahí nuestro proceso recursivo funcionaría.

Luego, por contradicción, nuestro proceso solo puede dar lugar al primer caso y hemos terminado.

$\square$

Problema 7. Para que pares de enteros (a, b) existen aplicaciones $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ verificando para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$f(g(n)) = n + a; \qquad g(f(n)) = n + b;$$

Solución. Veamos que exactamente los pares (a, a) y $(a, -a)$, con $a \in \mathbb{Z}$, son los únicos que lo verifican.

Es fácil ver que f es una biyección.

- Inyectividad. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, si $f(m) = f(n)$ entonces

$$m + b = g(f(m)) = g(f(n)) = n + b$$

luego $m = n$.

- Sobreyectividad. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ tenemos $f(g(k - a)) = k$.

Se sigue la biyectividad de f.

Tenemos

$$g(f(n)) = n + b \; ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Aplicando g a ambos lados de la igualdad

$$f(n) + a = f(g(f(n))) = f(n+b) \; ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Luego f viene unívocamente determinada por $f(0), f(1), \ldots, f(b-1)$, ya que $k \in \mathbb{Z}$ lo podemos escribir como $k = qb + r$, con $0 \leq r < b$, y recursivamente

$$f(qb + r) = f(r) + qa$$

Es fácil ver con está expresión y gracias a la biyectividad, probada anteriormente, que la cantidad de residuos módulo $|a|$ y módulo $|b|$ ha de ser la misma, pues por biyectividad para cada residuo, s, módulo $|a|$ ha de existir exáctamente un único residuo, r, módulo $|b|$ con $f(r) = s$. Luego necesariamente $|a| = |b|$ y queda $a = \pm b$.

Si $a = b$ entonces es fácil, encontrar tales aplicaciones f y g, por ejemplo con la identidad $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n \in \mathbb{Z}$ y la traslacíon $g : n \in \mathbb{Z} \mapsto n + a \in \mathbb{Z}$. Si $a = -b$ entonces nos vale con las aplicaciones $f : qa + r \in \mathbb{Z} \mapsto (-q)a + r \in \mathbb{Z}$ y $g : qa + r \in \mathbb{Z} \mapsto -(q+1)a + r \in \mathbb{Z}$.

$\square$

Problema 8. Sean r y s dos rectas paralelas y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r sea C el punto de la recta s tal que $\angle BAC = 90°$ y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de que punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.

Solución. Consideremos la circunferencia ω de centro A tangente a r y s en R y S respectivamente. Que existe por estar A a la misma distancia de ambas rectas paralelas.

Sea $H \in \omega$ el único otro punto distinto de R tal que $\angle BHA = 90°$, y sea C' el punto en el que BH inteserca a s. Entonces

$$\angle BAC' = \angle BAH + \angle HAC' = \angle RAB + \angle C'AS \; ;$$

donde la segunda igualdad es por simetría de R y H respecto a AB y por simetría de S y H respecto a AC.

Luego tenemos

$$2\angle BAC' = \angle RAB + \angle BAC' + \angle C'AS = \angle RAS = 180° \; ;$$

$$\angle BAC' = 90° \; ;$$

y queda que C' es es el único punto de s tal que

$$\angle BAC = 90°$$

y por tanto $C = C'$, de donde se sigue que $P = H$ y tenemos el aserto.

CASO DEGENERADO: El caso $B = R$ es el caso degenerado en el que C sería el punto del infinito de s que, por ser $s||r$, es el punto del infinito de r, y para este triángulo degenerado tenemos $P = R$. $\square$